

6. FUNKCJA WYMIERNA

Zad.6.1. Wykres funkcji f przesun o wektor \vec{u} . Podaj wzór otrzymanej funkcji, określ jej dziedzinę oraz podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\vec{u} = [0, -2]$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [0, 3]$

c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $\vec{u} = [-3, 0]$

d) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-2, -1]$

e) $f(x) = \frac{-2}{x}$, $\vec{u} = [2, -4]$

f) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [-1, 3]$

Zad.6.2. Narysuj wykres funkcji. Podaj równania asymptot.

a) $y = \frac{4}{x} + 1$ b) $y = \frac{-1}{x+3}$ c) $y = \frac{4}{x-1} - 3$

Zad.6.3. Które z przedstawionych funkcji są funkcjami wymiernymi?

a) $y = \sqrt{7}$ b) $y = 5x^2 - 4x + \sqrt{5x}$ c) $y = \sqrt{x-3}$ d) $y = \frac{x+5}{4}$
e) $y = \frac{4}{x+3}$ f) $y = \frac{x+3}{x-4}$ g) $y = \frac{x-1}{2x+6}$ h) $y = \frac{x^2}{x-3}$

Zad.6.4. Funkcja $y = \frac{a}{x-p} - q$ jest monotoniczna w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Zbiór $R \setminus \{3\}$ jest zbiorem wartości tej funkcji, a wartość 5 funkcja ta przyjmuje dla argumentu 3. Znajdź wzór tej funkcji.

Zad.6.5. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+b}{x+d}$ jest zbiór $R \setminus \{2\}$. Funkcja ta ma miejsce zerowe równe 4. Wyznacz współczynniki b i d .

Zad.6.6. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 3$

a) $\frac{x^2-9}{2x}$ b) $\frac{-x^2}{2x-6}$ c) $\frac{x}{x-2}$

Zad.6.7. Podaj dziedzinę i uprość wyrażenie.

a) $\frac{x^6-7x^4}{x^3}$ b) $\frac{x^2-x-2}{2x+2}$ c) $\frac{2x^4+4x^3+2x^2}{x^3+x^2}$
d) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ e) $\frac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$ f) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2+5x+6}$

Zad.6.8. Wykonaj mnożenie, odpowiedź podaj w najprostszej postaci

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1} & \text{b) } \frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x} \\ \text{c) } \frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x} & \text{d) } \frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+4} \end{array}$$

Zad.6.9. Przedstaw iloraz w postaci nieskracalnej.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2+2x+1}{x-3} : \frac{x+1}{x^2-9} & \text{b) } \frac{x^3+2x^2-4x-8}{4x+8} : \frac{x^2-4}{2} \\ \text{c) } \frac{x^2+8x+16}{x^3-16x} & \text{d) } \frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1} \\ & \frac{6x-9}{6x-4x^2} \quad \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \end{array}$$

Zad.6.10. Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} & \text{b) } \frac{3x-1}{x} - \frac{x-7}{2x} & \text{c) } \frac{3}{x} + \frac{x}{2+x} & \text{d) } \frac{x-6}{x-1} + \frac{2x-6}{x^2-1} \\ \text{e) } \frac{2-x}{x+2} - \frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+4} & \text{f) } \frac{x-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x^2-x} & \text{g) } \frac{1}{2x+2} - \frac{3}{3x+3} + 6 \end{array}$$

Zad.6.11. Wykonaj działanie.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{12c}{4c^2-9} + \frac{2c-3}{4c+6} + \frac{2c+3}{6c-9} \\ \text{b) } \frac{6}{4t-t^2} - \frac{2}{t^2+4t} - \frac{t}{t^2-16} \\ \text{c) } \left(1 - \frac{2}{1-3a}\right) \cdot \left(1 - \frac{9a-9a^2}{3a+1}\right) : \left[2(1-9a^2)\right] \\ \text{d) } \left(\frac{1-2x}{6x^2+3x} + 2x-1\right) \cdot \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{6x^2-1}{3x} \\ \text{e) } \frac{9y+27}{3y^2-y^3} + \left(\frac{3y+9}{y-3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3y-9} + \frac{2}{9-y^2} - \frac{1}{y^2+3y}\right) \end{array}$$

Zad.6.12. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x^2-5x+6}{x-2} = 0 & \text{b) } \frac{2x-7}{x} = -5 & \text{c) } \frac{x}{x-4} = x-3 \\ \text{d) } x-1 = \frac{x}{1+x} & \text{e) } \frac{x+1}{2} = \frac{8}{x-5} \\ \text{f) } \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-3}{x-5} = 2x-5 & \text{g) } \frac{x+5}{x+4} + \frac{5}{x-2} = \frac{1}{x+4} \\ \text{h) } \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1-x}{x^2+2x+1} = 0 & \text{i) } \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x-4} = \frac{14}{x^2-16} \end{array}$$

ODPOWIEDZI:

Zad.6.1. a) $y = \frac{1}{x} - 2$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f \downarrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ $f \downarrow \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

b) $y = -\frac{1}{x} + 3$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f \uparrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ $f \uparrow \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

c) $y = \frac{3}{x+3}$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f \downarrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3)$ $f \downarrow \Leftrightarrow x \in (-3, +\infty)$

d) $y = \frac{2}{x+2} - 1$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f \downarrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$ $f \downarrow \Leftrightarrow x \in (-2, +\infty)$

e) $y = \frac{-2}{x-2} - 4$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $y \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$f \uparrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$ $f \uparrow \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$

f) $y = \frac{-1}{x+1} + 3$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f \uparrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$ $f \uparrow \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$

Zad.6.2. a) $x = 0; y = 1$ b) $x = -3; y = 0$ c) $x = 1; y = -3$

Zad.6.3. Funkcja wymierna: a) d) e) f) g) h)
funkcja homograficzna: e) f) g)

Zad.6.4. $y = \frac{6}{x} + 3$

Zad.6.5. $b = -4; d = -2$

Zad.6.6. a) 0 b) nie istnieje c) 3

Zad.6.7. a) $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x^3 - 7x$

b) $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \frac{x-2}{2}$

c) $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}; 2x + 2$

d) $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}; \frac{x+2}{x-2}$

e) $D: x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x^2+1}$

f) $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}; \frac{2x+6}{x+2}$

Zad.6.8. a) $\frac{x^2}{x^3 + x^2 + x + 1}$ b) $\frac{x^2 + 3x}{2x + 4}$ c) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x}$ d) $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

Zad.6.9. a) $x^2 + 4x + 3$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{12x^2 - 13x - 11}{2x^2 - 2}$ d) $\frac{5x^2 - 7x + 4}{2x^2 - 4x}$

Zad.6.10. a) $\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$ b) $\frac{5x + 5}{2x}$ c) $\frac{x^2 + 3x + 6}{x^2 + 2x}$ d) $\frac{x^2 - 3x - 12}{x^2 - 1}$ e) $\frac{-2x^2 - 3x}{(x + 2)^2}$
f) $\frac{2x^2 + 2x}{x(x + 1)(x - 1)}$ g) $\frac{36x + 33}{6(x + 1)}$

Zad.6.11. a) $\frac{5(2c + 3)}{6(2c - 3)}$ b) $\frac{t + 4}{t(4 - t)}$ c) $\frac{-1}{2(3a + 1)}$ d) -1 e) $\frac{3y + 9}{y^2}$

Zad.6.12. a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = 2, x = 6$
d) $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e) $x = -3, x = 7$
f) $x = \frac{5}{2}, x = 6$ g) $x = -3$
h) brak rozwiązania i) $x = 2$